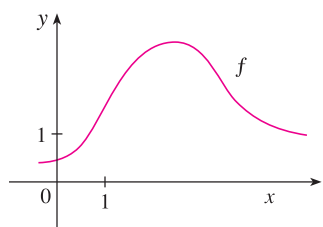


11.10 Ejercicios

- Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para toda x , escriba una fórmula para b_8 .
- Se proporciona la gráfica de f .



- Explique por qué la serie $1.6 - 0.8(x-1) + 0.4(x-1)^2 - 0.1(x-1)^3 + \dots$ no es la serie de Taylor de f centrada en 1.
- Explique por qué la serie $2.8 + 0.5(x-2) + 1.5(x-2)^2 - 0.1(x-2)^3 + \dots$ no es la serie de Taylor de f centrada en 2.

- Si $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia.
- Encuentre la serie de Taylor para f con centro en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

5-12 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x)$ usando la definición de la serie de Maclaurin. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \rightarrow 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| 5. $f(x) = (1-x)^{-2}$ | 6. $f(x) = \ln(1+x)$ |
| 7. $f(x) = \sin \pi x$ | 8. $f(x) = e^{-2x}$ |
| 9. $f(x) = 2^x$ | 10. $f(x) = x \cos x$ |
| 11. $f(x) = \sinh x$ | 12. $f(x) = \cosh x$ |

13-20 Calcule la serie de Taylor para $f(x)$ centrada en el valor dado de a . [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \rightarrow 0$.] También encuentre el radio de convergencia asociado.

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 13. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad a = 1$ | |
| 14. $f(x) = x - x^3, \quad a = -2$ | |
| 15. $f(x) = \ln x, \quad a = 2$ | 16. $f(x) = 1/x, \quad a = -3$ |
| 17. $f(x) = e^{2x}, \quad a = 3$ | 18. $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/2$ |
| 19. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi$ | 20. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 16$ |

- Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 7 representa πx para toda x .
- Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 18 representa $\sin x$ para toda x .
- Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 11 representa $\sinh x$ para toda x .
- Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 12 representa $\cosh x$ para toda x .

25-28 Use la serie binomial para desarrollar la función como una serie de potencias. Establezca el radio de convergencia.

- | | |
|-------------------------|---------------------|
| 25. $\sqrt[4]{1-x}$ | 26. $\sqrt[3]{8+x}$ |
| 27. $\frac{1}{(2+x)^3}$ | 28. $(1-x)^{2/3}$ |

29-38 Utilice la serie de Maclaurin que aparece en la tabla 1 para obtener la serie de Maclaurin para la función dada.

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 29. $f(x) = \sin \pi x$ | 30. $f(x) = \cos(\pi x/2)$ |
| 31. $f(x) = e^x + e^{2x}$ | 32. $f(x) = e^x + 2e^{-x}$ |
| 33. $f(x) = x \cos(\frac{1}{2}x^2)$ | 34. $f(x) = x^2 \ln(1+x^3)$ |
| 35. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ | 36. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2+x}}$ |
| 37. $f(x) = \sin^2 x$ [Sugerencia: use $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.] | |
| 38. $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ | |

39-42 Determine la serie de Maclaurin de f (mediante cualquier método) y su radio de convergencia. Grafique f y sus primeros polinomios de Taylor en la misma pantalla. ¿Qué observa respecto a la correspondencia entre estos polinomios y f ?

- | | |
|------------------------|--------------------------------|
| 39. $f(x) = \cos(x^2)$ | 40. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$ |
| 41. $f(x) = xe^{-x}$ | 42. $f(x) = \tan^{-1}(x^3)$ |

43. Mediante la serie de Maclaurin para $\cos x$ calcule $\cos 5^\circ$ con una aproximación de cinco decimales.

44. Utilice la serie de Maclaurin para e^x a fin de calcular $1/\sqrt[10]{e}$ con una aproximación de cinco decimales.

- Use la serie binomial para desarrollar $1/\sqrt{1-x^2}$.
- Use el inciso a) para hallar la serie de Maclaurin para $\sin^{-1}x$.
- Desarrolle $1/\sqrt[4]{1+x}$ como una serie de potencias.
- Use el inciso a) para estimar $1/\sqrt[4]{1.1}$ con una aproximación de tres decimales.



Se requiere calculadora graficadora o computadora

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-2)^n}{(n+2)!}$$

$$43. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$$

44. Calcule el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

45. Determine la serie de Taylor de $f(x) = \sin x$ en $a = \pi/6$.

46. Encuentre la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = \pi/3$.

47-54 Encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia. Puede aplicar el método directo (definición de una serie de Maclaurin) o las series conocidas, como la serie geométrica, serie binomial o la serie de Maclaurin para e^x , $\sin x$, $\tan^{-1}x$ y $\ln(1+x)$.

$$47. f(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

$$48. f(x) = \tan^{-1}(x^2)$$

$$49. f(x) = \ln(4-x)$$

$$50. f(x) = xe^{2x}$$

$$51. f(x) = \sin(x^4)$$

$$52. f(x) = 10^x$$

$$53. f(x) = 1/\sqrt[4]{16-x}$$

$$54. f(x) = (1-3x)^{-5}$$

55. Evalúe $\int \frac{e^x}{x} dx$ como una serie infinita.

56. Mediante series aproxime $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$ con dos dígitos decimales.

57-58

a) Obtenga un valor aproximado de f mediante un polinomio de Taylor de grado n en el número a .

 b) Dibuje f y T_n en una misma pantalla.

c) Use la desigualdad de Taylor para estimar la exactitud de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x se encuentra en el intervalo dado.

 d) Compruebe su resultado del inciso c) mediante la gráfica de $|R_n(x)|$.

$$57. f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.9 \leq x \leq 1.1$$

$$58. f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad 0 \leq x \leq \pi/6$$

59. Mediante las series evalúe el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

60. La fuerza debida a la gravedad que actúa sobre un objeto de masa m a una altura h por encima de la superficie de la Tierra es

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración de la gravedad.

a) Exprese F como una serie en potencias de h/R .

 b) Observe que si aproxima F con el primer término de la serie, obtenemos la expresión $F \approx mg$ que se usa por lo común cuando h es mucho más pequeña que R . Aplique el teorema de la estimación de la serie alternante para calcular los valores de h para los cuales la aproximación $F \approx mg$ no difiere 1% del valor real. (Use $R = 6400$ km.)

61. Suponga que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para toda x .

a) Si f es una función impar, demuestre que

$$c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$$

b) Si f es una función par, demuestre que

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

62. Si $f(x) = e^{x^2}$, demuestre que $f^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}$.